- DETERMINANTES -

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO

(Puccamp 2005) O biodiesel resulta da reação química desencadeada por uma mistura de óleo vegetal (soja, milho, mamona, babaçu e outros) com álcool de cana. O ideal é empregar uma mistura do biodiesel com diesel de petróleo, cuja proporção ideal ainda será definida. Quantidades exageradas de biodiesel fazem decair o desempenho do combustível.

1. Considerando-se que f(p) = 12 p - p£ e g(p) = p¤ - 24p£ + 144p, o valor do determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} f(2) & f(1) & f(0) \\ g(2) & g(1) & g(0) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é igual a

a) 4 620

b) 2 420

c) 2 200

d) 400

e) 220

2. (Fatec 2005) O polinômio

$$p = \begin{vmatrix} x & -1 & x+1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -x^2 & 1 \end{vmatrix}$$

admite:

a) três raízes reais.

b) uma raiz de multiplicidade 2.

c) nenhuma raiz real.

d) uma única raiz real.

e) uma raiz de multiplicidade 3.

3. (Fgv 2005) Seja

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \sec x & \operatorname{tg} x \\ 0 & \operatorname{tg} x & \sec x \end{vmatrix}.$$

Se D = 0 e ™ ´ x ´ 2™, então:

a) x = ™

b) x = 2™

c) x = (5™)/4

d) x = (4™)/3

e) x = (7™)/6

4. (Ita 2004) Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada n × n, n µ 2:

I. O determinante de A é nulo se, e somente se, A possui uma linha ou uma coluna nula.

II. Se A = (a‹Œ) é tal que a‹Œ = 0 para i > j, com i, j = 1,2,...,n, então det A = a_{11}a‚‚...aŠŠ.

III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por (Ë2) + 1 e a segunda por (Ë2) - 1, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então det B = det A.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas III.

c) apenas I e II.

d) apenas II e III.

e) todas.

5. (Pucpr 2005) Sendo 0 ´ x ´ ™/2, o valor de x para que o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} \cos x & \cos x & 1 \\ \tan x & \operatorname{sen} x & 1 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

seja nulo é:

a) ™/2

b) ™/3

c) ™/6

d) ™/4

e) ™

6. (Pucrs 2005) O determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x & \operatorname{cotg} x \\ \cos x & \cos x & -1 \\ 0 & \operatorname{sen} x & \operatorname{tg} x \end{bmatrix}$$

é:
a) 0
b) 1
c) sen x + cos x
d) sen£x
e) (sen x + cos x)£

7. (Ueg 2005) Sendo x e y, respectivamente, os determinantes das matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -4a & -4c \\ 5b & 5d \end{bmatrix},$$

é verdade que y/x é igual a
a) 1/20
b) - 1/20
c) 20
d) - 20
e) 3/20

8. (Ufes 2004) Se as matrizes A e B a seguir, com k È {-1,0,1}, então o determinante da matriz BAB¯¢ é
a) -1
b) 0
c) 1
d) k
e) 1/k

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ K & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. (Ufscar 2005) Seja A = (a‹) uma matriz quadrada de ordem 3 tal que,

ýp, se i = j
a‹ = þ
ÿ2p, se i · j

com p inteiro positivo. Em tais condições, é correto afirmar que, necessariamente, det A é múltiplo de
a) 2.
b) 3.
c) 5.
d) 7.
e) 11.

10. (Ufv 2004) Na matriz quadrada A = (aij) de ordem 2, os elementos a_{11}, a_1,, a,$_1$ e a,,, nesta ordem, apresentam a seguinte propriedade: "Os três primeiros estão em progressão aritmética e os três últimos em progressão geométrica, ambas de mesma razão". Se a_1, = 2, o determinante de A vale:
a) -8
b) 8
c) 0
d) -4
e) 4

11. (Ita 2005) Sejam A e B matrizes 2 x 2 tais que AB = BA e que satisfazem à equação matricial A£ + 2AB - B = 0. Se B é inversível, mostre que
(a) AB¯¢ = B¯¢A e que
(b) A é inversível

12. (Ufrrj 2004) Resolvendo a equação

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 1 & x & 4 \\ x & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

encontramos 3 raízes reais.
Determine-as, sabendo que a soma de duas dessas raízes é igual a 4.

13. (Ufscar 2003) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \log 0{,}1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \log 0{,}01 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule:
a) o determinante da matriz (B - A).
b) a matriz inversa da matriz (B - A).

14. (Unesp 2005) Foi realizada uma pesquisa, num bairro de determinada cidade, com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade x da criança, concluiu-se que o peso médio p(x), em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz A, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Com base na fórmula p(x) = det A, determine:
a) o peso médio de uma criança de 5 anos;
b) a idade mais provável de uma criança cujo peso é 30 kg.

15. (Unesp 2006) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} x - 2y & 1 \\ 3x + y & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

matrizes reais.
a) Calcule o determinante de A, det(A), em função de x e y, e represente no plano cartesiano os pares ordenados (x,y) que satisfazem a inequação det(A) $\leq$ det(B).
b) Determine x e y reais, de modo que A + 2B = C.

GABARITO

1. [E]
2. [D]
3. [B]
4. [D]
5. [D]
6. [B]
7. [D]
8. [A]
9. [C]
10. [A]

11.
a) Se B é inversível, temos:

$AB = BA \Rightarrow AB \cdot B^{-1} = BA \cdot B^{-1} \Rightarrow$
$A = BA \cdot B^{-1} \Rightarrow B^{-1} \cdot A = B^{-1} \cdot BA \cdot B^{-1} \Rightarrow$
$B^{-1} \cdot A = A \cdot B^{-1}$

c.q.d.

b) Como A e B comutam, tem-se:

$A^2 + 2AB - B = 0 \Rightarrow B = A(A + 2B)$

Aplicando determinantes em ambos os membros, obtemos:

$\det B = \det [\, A (A+2B) \,] \Rightarrow$
$\det B = \det A \cdot \det (A+2B)$

Como B é inversível, det B = k, $k \neq 0$.
Supondo que A não é inversível, isto é, det A = 0, temos:

$k = 0 \cdot \det (A+2B) \Rightarrow k = 0$

O que é uma contradição, pois $k \neq 0$.
Portanto, A é inversível.

c.q.d.

12.
2; $2 + \sqrt{7}$ e $2 - \sqrt{7}$

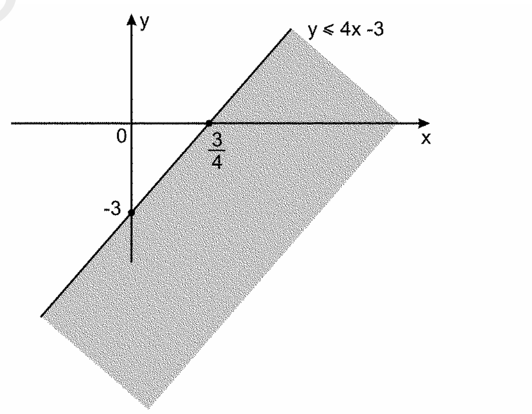
13.
a) 50
b)

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

14.
a) 18 kg

b) 11 anos

15.
a) det(A) = y - 4x



b) x = 1 e y = 2