



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

Pró-Reitoria de Graduação - Prograd

Serviço de Seleção, Orientação e Avaliação - SSOA

Vestibular 2011 — 2ª fase
Gabarito — Matemática

Questão 01 (Valor: 15 pontos)

Sejam U o conjunto de todos os números de 5 algarismos distintos formados com os algarismos 1, 3, 5, 8 e 9 e M o conjunto de todos os números de 5 algarismos distintos formados com os algarismos 1, 3, 5, 8 e 9 que são menores que 58 931.

A probabilidade de, escolhendo-se ao acaso, um elemento de U pertencer a M é $\frac{n(M)}{n(U)}$, sendo

$n(M)$ e $n(U)$ o número de elementos de M e de U , respectivamente.

Tem-se que $n(U) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

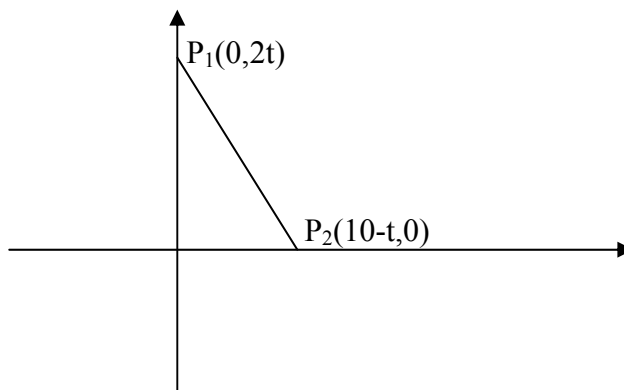
Cálculo do número de elementos de M :

- número de elementos de U que começam com 1: 1 _ _ _ _: Fixado o algarismo 1 na 1ª posição temos 4 algarismos para permutar, logo corresponde a $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- número de elementos de U que começam com 3: 3 _ _ _ _: Fixado o algarismo 3 na 1ª posição temos 4 algarismos para permutar, logo corresponde a $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- número de elementos de U que começam com os algarismos 51 _ _ _: Fixados os algarismos 5 e 1 temos 3 algarismos para permutar, logo corresponde a $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
- número de elementos de U que começam com os algarismos 53 _ _ _: Fixados os algarismos 5 e 3 temos 3 algarismos para permutar, logo corresponde a $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
- número de elementos de U que começam com os algarismos 581 _ _: Fixados os algarismos 5, 8 e 1 temos 2 algarismos para permutar, logo corresponde a $2! = 2 \cdot 1 = 2$.
- número de elementos de U que começam com os algarismos 583 _ _: Fixados os algarismos 5, 8 e 1 temos 2 algarismos para permutar, logo corresponde a $2! = 2 \cdot 1 = 2$.
- por último o número 58913.

Assim, $n(M) = 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 65$, logo a probabilidade é igual a $\frac{65}{120} = \frac{13}{24}$.

Questão 02 (Valor: 15 pontos)

Em cada instante t a posição da partícula P_1 é dada por $(0, 2t)$ e a posição da partícula P_2 dada por $(10-t, 0)$.



O quadrado da distância entre P_1 e P_2 é dado por $D^2 = (10-t)^2 + (2t)^2 = 100 - 20t + t^2 + 4t^2 = 5t^2 - 20t + 100$, função quadrática que assume valor mínimo para $t = \frac{-(-20)}{10} = 2$. Logo, quando o quadrado da distância é mínimo os pontos estarão nas posições $P_2(8, 0)$ e $P_1(0, 4)$. A reta que passa por esses pontos tem equação $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$, ou, $4x + 8y = 32$ ou $x + 2y = 8$.

Questão 03 (Valor: 20 pontos)

Como $P(x)$ é divisível por $x^2 + 2$, duas de suas raízes são $-\sqrt{2}i$ e $\sqrt{2}i$ e as outras três estando em progressão geométrica, pode-se escrevê-las como $\frac{a}{q}$, a , aq , sendo q a razão da PG.

Usando as relações entre coeficientes e raízes para $P(x)$, tem-se:

- a soma das raízes é $\frac{7}{3}$, logo $-\sqrt{2}i + \sqrt{2}i + \frac{a}{q} + a + aq = \frac{7}{3}$, o que equivale a $\frac{a + aq + aq^2}{q} = \frac{7}{3}$. (I)
- o produto das raízes é $-\frac{6}{3} = -2$, logo $-\sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i \cdot \frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = -2$ o que resulta em $a^3 = -1$ e, portanto, $a = -1$.

Substituindo $a = -1$ em (I) obtém-se:

$$\frac{-1 - q - q^2}{q} = \frac{7}{3} \Rightarrow -3 - 3q - 3q^2 = 7q \Rightarrow 3q^2 + 10q + 3 = 0 \Rightarrow q = -3 \text{ ou } q = -\frac{1}{3}.$$

Conclui-se, portanto, que as raízes são $\frac{1}{3}$, -1 e 3 .

Sendo assim, $P(x) = 3(x^2 + 2)(x - \frac{1}{3})(x + 1)(x - 3)$ e o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a $P(-2) = 3((-2)^2 + 2)(-2 - \frac{1}{3})(-2 + 1)(-2 - 3) = 3 \cdot 6 \cdot (-\frac{7}{3}) \cdot (-1) \cdot (-5) = -210$.

Questão 04 (Valor: 20 pontos)

A equação é equivalente a

$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(x + 7\pi) + \sin\left(\frac{11\pi}{2}\right) = 0 \text{ ou}$$

$$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cos x \cdot \cos x + \cos x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{ ou } 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Fazendo uma mudança de variável na última equação, substituindo $y = \cos x$, obtém-se a equação do 2º grau $2y^2 + y + 1 = 0$, cujas soluções são $y = -1$ e $y = \frac{1}{2}$.

Para $y = -1$, tem-se $\cos x = -1$ e, portanto, $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

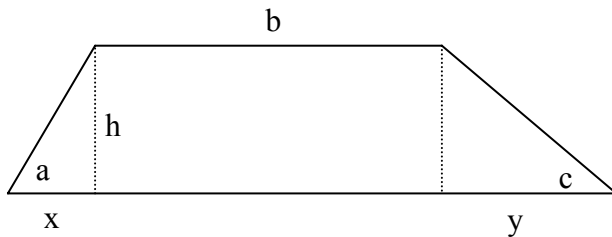
Para $y = \frac{1}{2}$, tem-se $\cos x = \frac{1}{2}$ e, portanto, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tem-se assim,

- Para $k = 0$: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$
- Para $k = 1$: $x = 3\pi$, $x = \frac{7\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$
- Para $k = -1$: $x = -\pi$, $x = -\frac{5\pi}{3}$

As soluções no intervalo $[-6, 8]$ são $-\frac{5\pi}{3}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, π , $\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{3}$.

Questão 05 (Valor: 10 pontos)



$$a = \arctg 2 \Rightarrow \operatorname{tga} = 2 = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ u.c.}$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow 1 = \frac{2}{y} \Rightarrow y = 2 \text{ u.c.}$$

$$A_T = \frac{(b+B).h}{2}, \text{ sendo } B = 1 + 4 + 2 = 7 \text{ u.c.}$$

$$A_T = \frac{(4+7).2}{2} = 11, \quad A_T = 11 \text{ u.a.}$$

Como T' é obtido de T por uma homotetia de razão $\frac{3}{2}$, segue que $A_{T'} = \frac{9}{4} \cdot 11 = \frac{99}{4} \text{ u.a.}$

Questão 06 (Valor: 20 pontos)

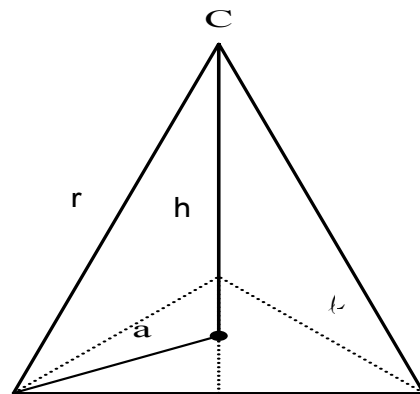
Na figura tem-se a pirâmide em que r é a aresta, h a altura e a a distância do centro da base a um dos vértices.

Usando o teorema de Pitágoras obtém-se $a = \sqrt{r^2 - h^2}$.

Sendo m a altura do triângulo equilátero, que é base da pirâmide, tem-se que $m = \frac{3}{2}a$

$$\text{logo, } m = \frac{3}{2}\sqrt{r^2 - h^2}.$$

Sendo ℓ o lado do triângulo, $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e



$$l = \frac{2\sqrt{3}}{3}m = \sqrt{3}\sqrt{r^2 - h^2}$$

A área da base da pirâmide é igual a

$$S_b = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{r^2 - h^2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{r^2 - h^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(r^2 - h^2)$$

O volume da pirâmide é $V_p = \frac{S_b h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(r^2 - h^2)h$.

Obs.: Outras abordagens poderão ser aceitas, desde que sejam pertinentes.

Salvador, 12 de dezembro de 2010

Antonia Elisa Caló de Oliveira Lopes
Diretora do SSOA/UFBA